Μ.Φ. 29/11/2016

Παρατήρηση: Για πραγματικούς δ.χ. ο προσαρτημένος λέγεται και ανάστροφος (transpose) και $A^+ = A^T$ με $\langle g|Af\rangle = \langle g|A^T f\rangle$.

α) Ο A λέγεται **συμμετρικός** όταν $A = A^T$

β) Ο A λέγεται **αντισυμμετρικός** όταν $-A = A^T$

γ) Ο A λέγεται **ορθογώνιος** όταν $A^T = A^{-1}$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός: Έστω για τον τελεστή $A \neq I$, υπάρχει διάνυσμα $|f\rangle$ τ.ω. $A|f\rangle = \lambda|f\rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε το διάνυσμα $|f\rangle$ καλείται **ιδιοδιάνυσμα** ή ιδιοσυνάρτηση του A και το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A.

Παρατήρηση: Αν $A = I$, τότε κάθε διάνυσμα, $|f\rangle$, είναι ιδιοδιάνυσμα του εαυτού του με ιδιοτιμή $\lambda = 1$. $A|f\rangle = |f\rangle$.

Π.χ. Έστω ένας τελεστής $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ στο χώρο των συναρτήσεων που είναι απείρως φορές παραγωγίσιμες για $x \in [0,L]$.
Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του τελεστή αν $u(0) = u(1) = 0$.

→ Δηλαδή, θέλουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα:

$$\begin{cases} Au(x) = -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \lambda u(x) & \text{(ΣΔΕ, 2ης τάξης, 1ου βαθμού, γραμμική ομογενής)} \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{(Πρόβλημα συνοριακών τιμών)} \end{cases}$$

- Φυσική σημασία του προβλήματος: Στάσιμα κύματα κατά την ταλάντωση μιας χορδής.
- Κβαντομηχανική: Δυναμική ενός σωματιδίου.

Η διαφορική εξίσωση είναι: $u'' + \lambda u = 0$.

Ζητάμε λύση της μορφής: $u(x) = e^{\rho x}$

Οπότε: $\rho^2 + \lambda = 0$ (χαρακτηριστικό πολ/μο)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

(α) Αν $\lambda \geq 0$. Τότε:

- για $\lambda > 0$, $u(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda} i x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} i x} = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$
- για $\lambda = 0$, $u(x) = Ax + B$.

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι:

$\lambda > 0$, $u(0) = B = 0$, $u(L) = A\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$

$\lambda = 0$, $u(0) = B = 0$, $u(L) = AL = 0 \Rightarrow A = 0$.

Άρα για $\lambda=0$ η αντίστοιχη λύση είναι $u(x)=0$.

$\lambda>0$, $A\sin(\sqrt{\lambda}\,L)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,L=n\pi \Rightarrow \lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n=1,2,\ldots$

Άρα $u(x)=A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n=1,2,\ldots$

Για να προσδιορίσω την A: $\langle u|u\rangle=1 \Rightarrow |A|^2\int_0^1 \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)dx=1.$

$\Rightarrow |A|^2=\frac{2}{L}$, για πραγματικές συναρτήσεις έχουμε:

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ n=1,2,\ldots \quad (\lambda>0).$$

(b) $\lambda<0$: Οι λύσεις είναι της μορφής:

$$u(x)=A\cdot e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+B\cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

Για $\lambda<0$, θα έχουμε: $u(0)=A+B=0$, $u(L)=A\,e^{\sqrt{-\lambda}\,L}+Be^{-\sqrt{-\lambda}\,L}=0$

Ομογενές σύστημα, με ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\,L} & e^{-\sqrt{-\lambda}\,L}\end{vmatrix}=e^{-\sqrt{-\lambda}\,L}-e^{\sqrt{-\lambda}\,L}\neq 0.$

(γιατί πρόκειται για γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις). Άρα $A=B=0$.

Δηλαδή, για $\lambda<0$, η λύση είναι η μηδενική: $u(x)=0$.

Συμπέρασμα:

α) $\lambda>0$, $u(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n=1,2,\ldots$

β) $\lambda=0$, $u(x)=0$

γ) $\lambda<0$, $u(x)=0$, μηδενική λύση.

Παραδείγματα Τελεστών

1) Ερμιτιανοί (hermitians) Τελεστές, $A^+=A$. Συμβολίζονται με H.

2) Αντιερμιτιανοί (anti-hermitians) Τελεστές $A=-A^+$.

3) Μοναδιαιοί Τελεστές (Unitary), $A^+=A^{-1}$. Συμβολίζονται με U.

ειδικότερα: $\langle Ug|Uf\rangle=\langle g|U^+Uf\rangle=\langle g|U^{-1}Uf\rangle=\langle g|f\rangle$,

διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων. Λέγονται και ισομετρικοί.

4) Κανονικός Τελεστής, $AA^+=A^+A$.

Άσκηση !: Ν.δ.ο. όλοι οι παραπάνω τελεστές, είναι κανονικοί.

{κάνω!}

5) Προβολικοί Τελεστές (projection operators),
Συμβολίζονται με P, αν α) Είναι αυτοπροσαρτημένος ($P = P^+$)
β) Ισχύει ότι $P^2 = P$.

Θεώρημα: Αν ο A είναι κανονικός τελεστής και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $A|f\rangle = \lambda|f\rangle \Longrightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$.
Δηλ. ο A^+ έχει τα ίδια ιδιοδιανύσματα, αλλά συζυγείς ιδιοτιμές λ^*

Αποδ.: Ορίζω τον τελεστή $C = A - \lambda I$, τότε $C^* = A^+ - \lambda^* I$. Ο τελεστής C είναι κανονικός, όταν ο A είναι κανονικός. Θέλω $CC^+|f\rangle = C^+C|f\rangle$.

- $\underline{CC^+|f\rangle}: = (A - \lambda I)(A^+ - \lambda^* I)|f\rangle = (A - \lambda I)(A^*|f\rangle - \lambda^*|f\rangle)$
$= AA^+|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle - \lambda A^*|f\rangle + |\lambda|^2|f\rangle$.
- $\underline{C^+C|f\rangle}: = (A^+ - \lambda^* I)(A - \lambda I)|f\rangle = (A^+ - \lambda^* I)(A|f\rangle - \lambda|f\rangle)$
$= A^+A|f\rangle - \lambda A^*|f\rangle - \lambda^* A|f\rangle + |\lambda|^2|f\rangle$.

Αφού ο A είναι κανονικός ($AA^+ = A^+A$), τότε $CC^+ = C^+C$, δηλ. κανονικός.
(Γνωρίζω ότι $C|f\rangle = 0$, (γιατί $C|f\rangle = (A - \lambda I)|f\rangle = A|f\rangle - \lambda|f\rangle = 0$))
όμως, αφού $C|f\rangle = 0$, τότε $\Rightarrow \langle Cf|Cf\rangle = 0$.

$$\Rightarrow \langle Cf|Cf\rangle = \langle f|C^+Cf\rangle = \langle f|CC^+f\rangle = \langle C^+f|C^+f\rangle = 0$$

$$\Rightarrow C^+|f\rangle = 0 \rightarrow (A^+ - \lambda^* I)|f\rangle = 0 \Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle.$$

Παρατηρήσεις:

1) Αν "H" Ερμιτιανός τελεστής, τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.

Αποδ.

H, Ερμιτιανός, άρα κανονικός, άρα $\begin{cases} H|f\rangle = \lambda|f\rangle \\ H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \end{cases}$
όμως γνωρίζουμε ότι $H = H^+$, Άρα $H|f\rangle = \lambda|f\rangle = H^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$
$\Rightarrow \lambda = \lambda^*$, που ισχύει όταν $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Αντίστοιχα, αν είναι αντι-ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του έχουν μέτρο μονάδα.

Αποδ.

Μ.Φ. 22/11/2016 ③

$$U|f\rangle = \lambda|f\rangle,\quad U^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle \Rightarrow \lambda U^+|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle$$

$$\Rightarrow U^+\lambda|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow U^+U|f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f\rangle = |\lambda|^2|f\rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1.$$

Θεώρημα: Τα ιδιοδιανύσματα ενός κανονικού τελεστή που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια.

Απόδ. Έστω A κανονικός τελεστής και $\lambda_1 \neq \lambda_2$, δύο ιδιοτιμές του, τότε $\begin{cases} A|f_1\rangle = \lambda_1|f_1\rangle \\ A|f_2\rangle = \lambda_2|f_2\rangle \end{cases}$ πρέπει ν.δ.ο. $\langle f_1|f_2\rangle = 0$ (πρέπει ν.δ.ο τα ιδιοδιανύσματα να είναι ορθογώνια.)

Αφού ο A είναι κανονικός, $AA^+ = A^+A$, τότε αν $A|f\rangle = \lambda I$
$\Rightarrow A^+|f\rangle = \lambda^*|f\rangle$.

$$\langle f_2|Af_1\rangle = \lambda_1\langle f_2|f_1\rangle$$

$$\langle f_1|Af_2\rangle = \lambda_2\langle f_1|f_2\rangle \quad ①, \text{ όμως}$$

$$\langle f_1|Af_2\rangle = \langle f_2|A^+f_1\rangle^* = \langle f_2|\lambda_1^* f_1\rangle^* = \lambda_1\langle f_2|f_1\rangle^* = \lambda_1\langle f_1|f_2\rangle \quad ②$$

Από (1),(2) : $\lambda_1\langle f_1|f_2\rangle = \lambda_2\langle f_1|f_2\rangle$, όμως οι ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα $\langle f_1|f_2\rangle = 0$.

Άσκηση: Να εξετάσετε αν ο τελεστής ολοκλήρωσης:
$A = \int_0^x dt$, είναι αυτοπροσαρτημένος.

→ Ζητάμε το εσωτερικό γινόμενο: $\langle g|A^+f\rangle = \langle Ag|f\rangle$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_0^x g(t)dt}_{G(t)}\Big)^* f(x)\,dx = \int_a^b G^*(t)\,f x\,dx = \left(\int_a^b G(x)f^*(x)\,dx\right)^*.$$

με $\int_a^b G(x)f^*(x)\,dx = G(x)f^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b G'(x)\,\underset{\text{παράγουσα}}{F^*(x)}\,dx$

$$= G(b)f^*(b) - G(a)f^*(a) + \int_a^b g(x)\big(-Af^*(x)\big)dx.$$

(όπου $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F^*(x) = \int_0^x f^*(t)dt$)

Άρα, $A^+ = -\int_0^x dt$, αν $G(b)f^*(b) = G(a)f^*(a)$.

Άσκηση! Δίνονται οι τελεστές k και S τ.ω. $k = e^{iS}$.

(Κάνω!)

a) Ν.δ.ο αν $S = S^+$ και $k^+ = k^{-1}$. Το k είναι?? (για απαντήσεις)

b) Αν $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, να βρεθεί ο τελεστής k.

Οκ θα είναι: $k = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})e^2}{2e} & \frac{ie^2-1}{2e} \\ \frac{ie^2-1}{2e} & \frac{1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})e^2}{2e} \end{pmatrix}$.